NACHI

NACHI-BUSINESS Components news

Vol.10 D1
June/2006

機能部品事業
マテリアル マシニング

■ 技術講座

知りたいトライボロジー講座③

「転がり接触について」

Things to know about Tribology "Rolling Contact"

〈キーワード〉 接触問題・ヘルツ理論・接触楕円・パルムグレン・線接触・クラウニング

部品事業部／技術一部
高木 俊行 Toshiyuki Takagi
監修 部品事業部／技術一部
渡辺 孝一 Kouichi Watanabe

株式会社 不二越

要　旨

ものの移動には転がりという運動を使うことで、楽に移動できることは紀元前12,500年のピラミッド建設時からわかっていました。今日でも自動車のタイヤなど、あらゆるところに当たり前のようにこの技術は応用されています。

転がり運動をしながら接触する2物体の間には、どのような力が動き、伝達していくのでしょうか。このような問題を扱うのが接触問題です。

これはヘルツ[※1]理論と呼ばれ、今日では接触問題に欠かせない重要な理論です。この論文の基本原理にさかのぼって接触問題を分かりやすく解説します。

Abstract

It has been perceived since the era of Pyramid that objects can be easily moved using rolling motion rather than using sliding motion. At present, the technology is being applied to every possible area as if its use is the norm. One of applications is the tires for automobiles.
Tow objects make contact with each other while they are rolling. How is a force transferred to the contact area? The contact theory is the theory that deals with such issues and is called Hertz Theory. Nowadays, the theory is absolutely essential in term of dealing with such contact issues. The contact issues will be explained intelligibly here including the basic theorem of the theory.

1. 転がり運動のメカニズム

転がり運動は、エネルギー損失が低く、円滑な運動が期待できるために、多くの摩擦面に応用されています。

転がり運動では、接触し合う2物体が必ず存在します。例えば、タイヤと地面、車輪とレールなどです。接触し合う2物体には、硬さなどの所定の要件が必要とされます。ピラミッド建設のときも、古代人は硬いタイヤで硬い道を伝って石を運んでいました。転がり運動しながら接触する2物体の間には、当然、石などの積載荷重が加わるからです。接触面は、どれだけの大きさになって、その面積にどのように力が伝達していくのでしょうか。

このような接触問題を近代の鉄鋼製品に初めて応用した人はヘルツ（Heinrich Rudolf Hertz;独 1857〜1894）です。ヘルツ理論は、接触問題に多く貢献しているのですが、論文発表当時は誰も見向きもされなかったそうです。

では、この論文の基本原理にさかのぼって接触問題を解説します。

2. 接触面で生じること

1）楕円にかかる面圧

接触する2つの物体は一体どれだけの面積で接触し、どれだけ潰れるのでしょう。ここでは表面の凸凹はなく、なめらかなものと仮定します。

例えば、ゴムボールのようなものをイメージして、これに力Fを加えて床に押しつぶすことを想像してください。ボールは、そっと床に置いたときと較べて、ある量だけ沈みこんで、ある面積の分だけ床にくっつきます。ボールに色を塗っておくと、床についた色あとの大きさが接触の大きさと形状を示してくれます。この接触した形状を「接触楕円※2」と呼び、沈み込んだ量を「弾性接近量※3」または「弾性変位量」と呼んでいます。

これらの用語は、接触問題を考えるときには頻繁に出てくるので、ぜひ覚えてください。

では、外力Fはどうなったのでしょう。この力は接触した面積に作用していることになります。しかし、接触楕円というのは、1平方ミリとか、たいていの場合はとても小さいのです。そんな小さい面積で大きい力を受けるということになります。

このように、局所的に大きな力を受けることになるので、接触問題では、この接触面をきちんと計算し、設計上、必要な強度などを吟味するようにしています。

全体の力を接触面積で割ったものを「平均面圧（Pmean）」と呼びます。しかし、力は接触面に均一に分散するわけではありません、中央部がもっとも大きくなります。これを「最大面圧（Pmax）」と呼びます。これらの数値は、どのようにして計算するのかをこれから論じたいと思います。

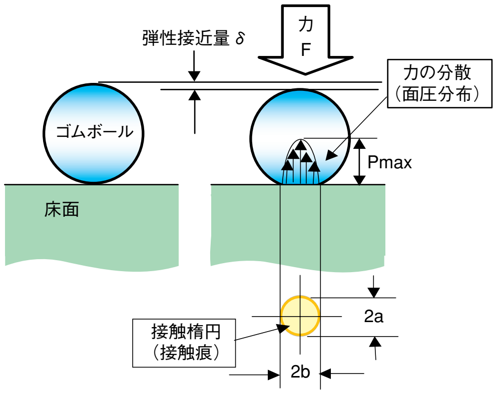

図1　ゴムボールを床に押しつけたときの接触状況

2）接触楕円の形状と大きさ（接触点で生ずる接触痕）

ゴムボールを床に押しつけたときの接触痕を接触楕円と呼びました。実際は円なのですが、ボールのような球体の場合は、確かに接触痕は円になりますが、ラグビボールのような球体の場合は、楕円の接触痕になるからで、ほとんどのケースは、このような接触状況になるからです。

これは曲率半径といって、接触体をある断面で切ると曲率を描いていますが、この曲率半径の大きさが断面により異なるから生じるものです。

ボールはどの断面で切っても同じ曲率半径ですが、大抵の物体は切る断面により異なります。

これを表すのに、一般には90°開いた断面で曲率半径を定義することが多いようです。

（接触痕の大きさ）

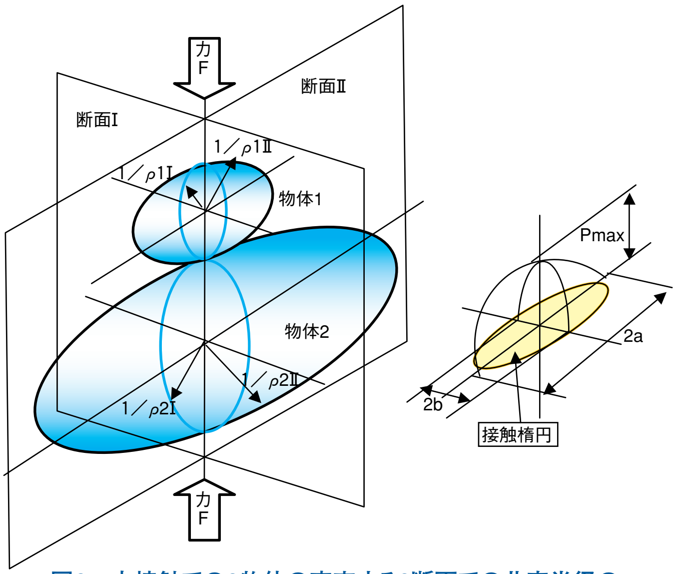

図2　点接触での2物体の直交する2断面での曲率半径の採り方と接触楕円の大きさの定義

接触状況を計算するときは、曲率半径の逆数を計算に用います。これを「曲率」と呼び、一般に記号ρで表します。

曲率ρ＝1／曲率半径　です。

断面により曲率は異なるので、これらを識別をするのに、ρⅠとかρⅡのようにサフィックスをつけることにしています。また、接触は平面とボールのようなくみ合わせは実際のところは殆どなく、曲率をもったもの同士の組み合わせがほとんどです。

これらを識別するのに、さらに物体1と2の識別をつけることで、

ρ1Ⅰ、ρ1Ⅱ・・・・物体1のⅠ及びⅡ断面

ρ2Ⅰ、ρ2Ⅱ・・・・物体2のⅠ及びⅡ断面

と識別の上、さらに曲率半径の中心が物体の中にあれば＋（凸形状）、外にあればー（凹形状）と、定義されます。

（接触痕の最大面圧）

このように数値を定義することで、結論的に言えば、鉄鋼材料でできた接触する2物体間に発生する接触楕円の大きさと、最大面圧は、外力Fの大きさに応じて、次の計算式で算出することができます。

$$2a=23.6\times10^{-3}\cdot\mu\cdot(F/\Sigma\rho)^{1/3}$$

$$2b=23.6\times10^{-3}\cdot\nu\cdot(F/\Sigma\rho)^{1/3}$$

$$P_{max}=861.5/\mu/\nu\times F^{1/3}\times(\Sigma\rho)^{2/3}\ (=1.5\cdot F/\pi/a/b\text{でもある})$$

ここに、曲率和[※4]$\Sigma\rho=\rho1\mathrm{I}+\rho1\mathrm{II}+\rho2\mathrm{I}+\rho2\mathrm{II}$

単位系は全てN、mmです。

ここに出てくるμおよびνは断面による、曲率差[※5]Dρ＝ρ1Ⅰーρ1Ⅱ＋ρ2Ⅰーρ2Ⅱを補助的に計算して、Dρ／Σρを計算すれば数表を使用して求めることができます。

実際に計算すると、鉄鋼材料でできた通常のベアリングでは、10ミリ程度のボールでも、2aの寸法が2ミリ程度とか、大変小さな数値が計算されますが、実際にベアリングに付いた痕をみると、計算と実際がよく合っていることが多く確認されています。

特徴的なのは、2つの球体の各曲率：ρ1Ⅰ～ρ2Ⅱが決まるとμとνおよびΣρが決まり、外力Fが増加しても2a／2bの比率は変わらないということです。

つまり外力の1／3乗に比例して、2aも2bも共に大きくなっていきます

わずか数ミリ平方の面積で数百キロの荷重を受けて回転しているのがベアリングのボールなのです。

3. ヘルツの数式の成立まで

1）ブシネスク理論からの展開

2.で述べた数式はヘルツが数理論的にまとめたもので、今日ではベアリングに限らず、歯車など接触して力を伝達する分野では必ず、設計等に利用されています。

この理論ができる前に、ブシネスク（Joseph Valentin Boussinesq；仏 1842〜1929）という人が、平板の上に針のようなもので集中荷重を与えたときに、荷重点からrだけ離れた場所での変位がどのようになるかを数理論的に明らかにしていました。

ブシネスクの理論解：$w=F/\pi Er$

‥‥$r=0$で$w=\infty$になってしまう

この数式は理論的に単純で、完璧なものでしたが、$r=0$の荷重直下では解が得られない欠点がありました。

そこで考えたのが、集中荷重をいくつも造って、そこからrだけ離れた地点の変位を求めたらどうなるかだったのですが、集中荷重をいくつも造り、これらがある特定の一つの箇所にどのように影響するかを計算することは、積分という作業が入り、このことで$r=0$で解が得られなくなるという欠点を克服できたのです。

2）ヘルツの設定した面圧分布

この集中荷重の集まりを、例えば半径aの中心がPmax半球体のような荷重の分布が平面に設定したとすると、計算過程は複雑なので割愛しますが、

$W_{max}=a\pi P_{max}/2E$

としたとき、任意の中心からrの距離の沈み込みの変位wは、

$$W/W_{max}=1-(r/a)^2/2$$

…$a/r<1$（外側）のとき

$$W/W_{max}=\frac{2a}{\pi r}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^3\theta}{(1-(a/r\cdot\sin\theta)^2)^{1/2}}\,d\theta$$

…$a/r>1$（内側）のとき

と表されるとヘルツは誘導しました。積分により$r=0$での解不能が解消されたのです。しかも、$a/r>1$（内側）の平面が潰れている形状は面圧分布とよく似た形状になっているのです。

つまり、球体を平面に押しつぶしたときの形状と酷似していたのです。これが大きな進展となりました。

a：点接触における接触楕円の半径

E：ヤング率または縦弾性係数とも言い、弾性範囲内での引っ張りまたは圧縮の応力に対するひずみ量の関係から求まる定数。

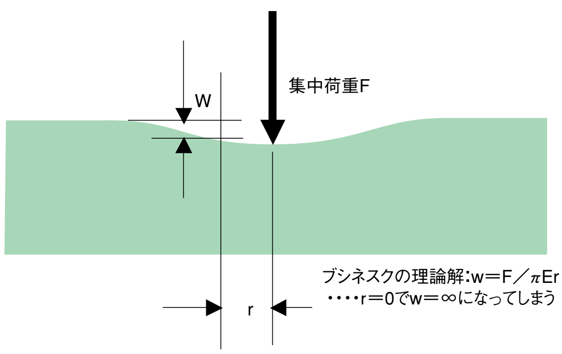

図3　ブシネスクの1点集中荷重の理論解模式図

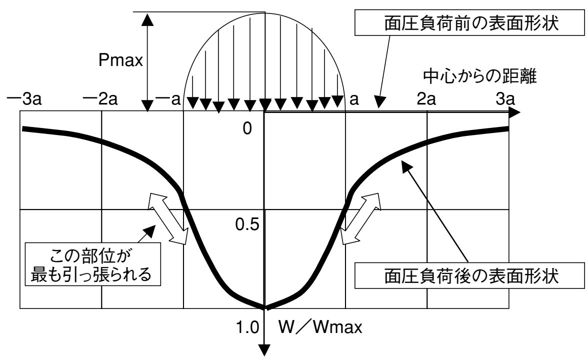

図4　平面に半球体面圧分布を設定したときの平面沈込み量のヘルツの理論解

（球体と平面の接触面はフラット）

これを実際の球体と平面の接触に当てはめると図5のように弾性接近量は、平面自身の沈込みと球体の潰れ量とで構成され、このことで接触面はフラット（平面）になることを理論的に誘導できたわけです。

ヘルツの理論では、接触楕円の大きさが接触し合う物体に比べ充分小さいときに適用できると断り書きをしていますが、この範囲内であれば確かに接触面はフラットになると計算できるのです。

この面圧分布を仮定したときに生じる沈込みとそのときの接触痕が実際とよく合うことから、ヘルツは2.で述べた点接触[※6]の理論解を誘導しました。

このようにして、接触問題はどんな形状のものでも計算できるようになりました。また、接触面そのものはフラットになるとした面圧分布のもとで弾性流体潤滑理論が構成されていますが、これらの理論は事実をうまく説明できるとして学会、産業界で広く支持されています。

3）日常生活で面圧分布を経験すること

ヘルツの面圧分布と、それに伴う平面部の表面をみればわかるのですが、接触楕円が切れる縁の表面形状には変曲点があることがわかります。実は、この部分の表面が最も引っ張られているのです。

このことは、たとえば豆腐のような柔らかいものに硬貨を何枚か重ねてそっと置いていくと目でわかるようになります。硬貨の縁からピリピリと亀裂が入るようになります。

一般的に、このように2つの物体を押しつけると接触痕の縁から順次傷が発生していくのは、このような理由によります。ここでもヘルツの面圧分布の確からしさが納得できます。

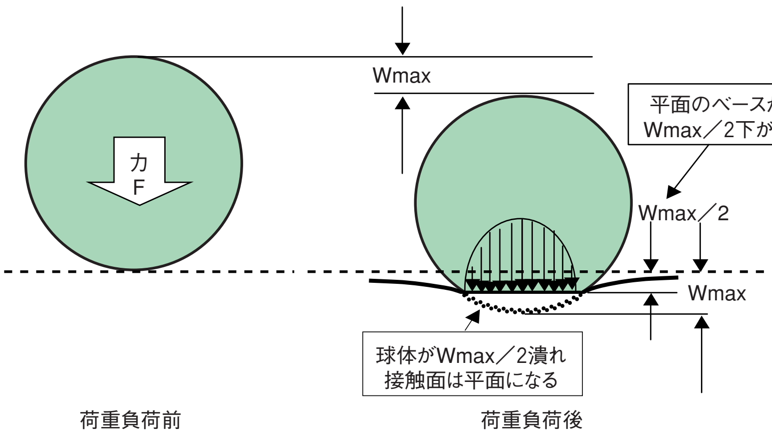

図5　平面に球体を押しつけたときの弾性接近量のヘルツ理論解

4）線接触への展開[※7]

ここで書いた数式では、点接触といって接触し合う2物体の各断面に曲率半径をもっているものです。ところがころ（ローラー）といって、一つの断面では曲率半径が無限大になってしまう物体を平面に押しつけた場合はどうなるのでしょうか？図6（a）の断面Ⅰには、ころ半径の曲率値はありますが、断面Ⅱでは曲率半径値は無限大になっています。

現実的には、このようなケースはかなりあります。ピラミッド建設に使われた運搬具も実は「ころ」でした。ヘルツは、これに対し現実を説明できる答えは与えていません。この理論解を構成するには、ルンドベルグ（Gustaf Lundberg；独 1901〜1961）、パルムグレン（Arvid Palmpren；スウェーデン 1890〜1971）の登場を待たなければならなかったのですが、それにしてもヘルツの接触楕円理論の特殊解として与えられました。

ですが、それでも未だに完璧性には欠けているのが実態です。この大きな理由は、点接触で計算される接触楕円の大きさは接触し合う2物体の内部に確実に入るのに対し、線接触の場合は、接触痕がころの有限長さの端にまで至り、平面部は十分な長さがあっても、ころの方は有限長さなので、ころ潰れ量が不連続になってしまうからです。

それでも、何らかの計算の指針を与える必要があります。

（ころの外径面を曲率半径で近似）

そこで、ころの外径面にクラウニング[※8]といって大きい曲率半径をもたせ、この半径がある適切な数値のときに次のような近似ができるとしてパルムグレンは理論付けしました。
それが今日では、修正線接触理論と呼ばれているものですが、この理論によれば次の結果になります。

$2b=3.257\times10^{-3}\cdot(F/\Sigma\rho/leff)^{1/2}$
$Pmax=195.4\cdot(F\cdot\Sigma\rho/leff)^{1/2}$
ここに、$\Sigma\rho=\rho1\mathrm{I}+\rho2\mathrm{I}$

leffはころの有効長さであり、この分が点接触の2aに相当するので、2aの計算式はありません。

（修正線接触理論）

クラウニング曲率半径値の決め方は、仮に、ころの長さleffが有限値ではないとして、ラグビボールのようなころが点接触したとしたときに、計算される接触楕円の長径2aが、有限長さleffのちょうど1.5倍になるように、クラウニング曲率半径値を決めるとしています。

この考え方が修正線接触理論の中身です。有限長さをもった線接触の適切な接触状態を現実に作り出すときによく用いられる考え方となっており、ころ軸受の設計では最もよく使う理論式の一つになっています。

このようにして、ある外力で接触し合う2物体の接触面がどのようになっているかは、ほとんど計算できるようになってきました。

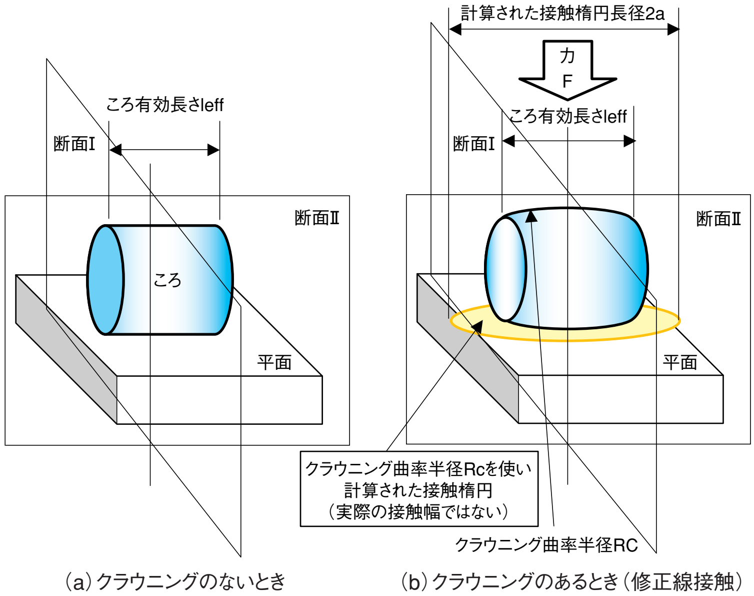

図6　平面ころを押しつけるときの曲率の採り方

4. 地球同士の衝突と接触理論

このようにして、ヘルツは今日の転がり（ベアリング）の開発にはなくてはならない功績を残してくれました。

ヘルツは、世間の注目を集めるために、常人では考えつかない計算をしています。それは、地球と地球をその公転速度で衝突させたらどうなるか、という計算でした。

弾性変位量というくらいですので、ある力で接触し合う2物体は変位すると弾性エネルギーをもちます。2物体の衝突前の運動エネルギーが、この弾性エネルギーと釣り合うとして計算したものですが、この計算手法はロシアの弾性理論の権威であるチェモシェンコ（Stephen P, Timoshenko;露 1878～1972）も「弾性理論（Theory of Elastity）」という著述の中で、引用し説明しています。

それによれば、地球同士は数キロメートル弾性変位し、当然接触面はフラットになるのですが、数分後には再び離れていくとしています。

計算式は複雑なので省略しますが、ベアリングbearingが「耐える bear」などの意味を持つように、接触理論も地味な学問体系であったことには違いないと思います。そして、そのような基本となる地味な学問の積み重ねで、今日の産業が成立していることも事実だと思われます。

用語解説

※1 ヘルツ理論
二つの弾性物体が接触し荷重とともに接触面積が増加してゆく時、二物体の接近量、接触領域、接触圧力を弾性力学にもとづいて解析した理論計算式。

※2 接触楕円
二つの弾性物体が接触面に対し垂直方向に加重を受け、接触部が潰れた時の接触部楕円形状。

※3 弾性接近量
二つの弾性物体が接触し、接触面に対し垂直面に対し垂直方向に加重を受けた場合、その荷重により各物体が潰れる二物体接触中心の接近量の和。

※4 曲率和
Σρ＝ρ1Ⅰ＋ρ1Ⅱ＋ρ2Ⅰ＋ρ2Ⅱで表され、接触する二物体の接触面中央位置で直交する、各断面における各曲率の総和。

※5 曲率差
Dρ＝ρ1Ⅰ－ρ1Ⅱ＋ρ2Ⅰ－ρ2Ⅱで表され、接触する二物体の接触面中央位置で直交する、各断面における各物体毎の曲率の差をたしたもの。

※6 点接触
球面と球面の接触の様に、接触面に対し垂直方向の荷重が増加すると荷重の増加とともに接触面が全ての方向に増加し、一般に楕円接触面を生じる様な接触状態。球面と平面、直交2円筒も点接触となる。

※7 線接触
円柱と平面の接触の様に、二物体が線で接触し接触部に垂直方向の荷重と増加とともに、接触面が一方向に幅をもって増大する様な接触状態。平行2円筒も線接触となる。

※8 クラウニング
線接触におけるころと内輪の様に円柱形と円柱形の接触、または円柱形と平面の接触の場合、ころの形状が軸方向に垂直になっているときにころ両端部で発生するエッジロードを回避するため、ころの外形面に曲率半径をもたせるとともに、ころ両端部付近にも曲率形状をもたせるもの。

参考文献

1）チェモシェンコ：弾性理論（Theory of Elastity）

2）山本雄二・兼田楨宏：トライボロジー　理工学社刊.

関連記事

1）渡辺孝一：知りたいトライボロジー講座①「トライボロジー入門」
NACHI-BUSINESS news Vol.7 D1、May／2005

2）横山 良彦・渡辺 孝一：知りたいトライボロジー講座②「摩擦・摩耗」
NACHI-BUSINESS news Vol.9 D2、November／2005

NACHI-BUSINESS news
Vol.10 D1 | June / 2006

〈発　行〉2006年6月20日
株式会社 不二越　開発本部　開発企画部
富山市不二越本町1-1-1 〒930-8511
Tel.076-423-5118 Fax.076-493-5213